

## Chapitre XV

# MÉCANIQUE DES FLUIDES.

Joël SORNETTE vous prie de ne pas utiliser son cours à des fins professionnelles ou commerciales sans autorisation.

*Sous le pont Mirabeau coule la Seine  
Et nos amours  
Faut-il qu'il m'en souvienne  
La joie venait toujours après la peine*

Apollinaire. *Alcools*.

*La mécanique des fluides est omniprésente. Dans notre monde technologique, l'aéronautique en relève au premier chef, mais aussi la construction automobile (recherche d'aérodynamisme). En bio-logie, l'écoulement du sang dans les artères, les veines et les capillaires ressortit de ce chapitre, et en géologie, la compréhension des courants marins, des mouvements atmosphériques, donc la prévision météorologique.*

*La grande difficulté de ce domaine est qu'il est régi par des équations non linéaires et que l'approche par simulation numérique est encore bridée par une puissance de calcul insuffisante.*

### XV-1 Introduction.

#### XV-1.a Quelques repères historiques.

- 1732 : Henri de PITOT invente une machine à mesurer la vitesse des fleuves et des navires.
- 1738 : Daniel BERNOULLI exprime le principe de conservation de l'énergie dans les écoulements de fluides.

- 1750-1753 : Leonard EULER établit les équations du mouvement d'un fluide non visqueux et en déduit ce qu'on appelle aujourd'hui le théorème de BERNOULLI.
- 1768 : D'ALEMBERT établit qu'une sphère en mouvement uniforme dans un fluide ne subit aucune force ; il s'agit du paradoxe qui porte son nom. On sait maintenant qu'on lève celui-ci en introduisant la viscosité.
- 1788 : LAGRANGE introduit la notion de potentiel des vitesses, ce qui permet une nouvelle approche des écoulements non rotationnels.
- Claude NAVIER, en 1822, et G.G.STOKES, en 1845 et sous une autre forme, établissent les équations du mouvement d'un fluide visqueux.
- 1840-1844 : Pour modéliser l'écoulement du sang dans les vaisseaux, le médecin Jean-Louis POISEUILLE effectue des mesures très précises sur des canalisations cylindriques et en déduit la relation débit-chute de pression qui porte son nom.
- 1859-1860 : HELMHOLTZ dégage les idées sur les écoulements rotationnels.
- 1883-1893 : Osborne REYNOLDS met en évidence la transition entre régime laminaire et régime turbulent.
- 1887 : MACH étudie les écoulements supersoniques.
- 1893 : DE LAVAL met au point la tuyère convergente-divergente.
- 1900 : Maurice COUETTE effectue les premières mesures précises de viscosité à l'aide d'un appareil à cylindres tournants.
- 1903 : TSIOLKOVSKI élabore le principe du moteur à réaction.
- 1906 : JOUKOVSKI établit la relation entre la portance d'une aile et la circulation du vecteur vitesse autour de celle-ci.
- 1910 : Ludwig PRANDTL développe la théorie de la couche limite.
- 1980 : Les ordinateurs commencent à être assez puissants pour simuler modestement les écoulements turbulents.

### XV-1.b Qu'est-ce qu'un fluide ?

Plusieurs approches sont possibles,

- thermodynamique : le diagramme d'état d'un corps pur permet de distinguer l'état solide et l'état fluide qui, en dessous de la température critique, existe sous deux versions, l'état liquide et l'état gazeux ; mais certains corps passent continûment de l'état liquide à l'état solide qui est alors un fluide à viscosité devenue infinie.
- empirique : un fluide c'est ce qui coule, mais dans certains cas tout dépend de l'échelle de temps (au delà de l'échelle de l'année, la glace d'un glacier s'écoule et se comporte comme un fluide très visqueux) ; mais un tas de sable, bien que pouvant couler, a un comportement qui le rapproche d'un ensemble de solides en contact ;
- mécanique : les forces internes à un corps sont liées aux déformations pour un solide et aux vitesses de déformation pour un fluide, mais existent des comportements mixtes comme le caoutchouc.

Aucune définition ne sera à l'abri d'un contre-exemple et nous adopterons une attitude pragmatique.

**XV-1.c Notion de libre parcours moyen.**

Dans un fluide, l'agitation thermique confère à chaque molécule un mouvement erratique constitué de segments de droites séparant deux chocs successifs avec d'autres molécules ; ces segments ont des directions et des longueurs aléatoires. On appelle *libre parcours moyen* la moyenne statistique de leurs longueurs. Qualitativement, il est d'autant plus long que la molécule subit moins de chocs. Il est aisé d'en déduire les deux facteurs essentiels influant sur le libre parcours moyen : la taille de la molécule, donc la nature chimique du fluide, et la *densité particulaire* du milieu (c'est-à-dire le nombre de molécules par unité de volume). Il n'est pas au programme de PC de proposer un modèle permettant d'évaluer le libre parcours moyen, nous affirmerons ici les résultats à connaître ; mais nous ne résisterons pas à l'envie de vous proposer un modèle en exercice pour votre culture. Pour un liquide, pratiquement indépendamment des conditions de température et de pression, le libre parcours moyen est du même ordre de grandeur que la distance interatomique, soit  $10^{-10}$  m, pour un gaz, aux conditions normales de température et de pression, il est de l'ordre de  $10^{-7}$  m, alors que la distance interatomique est de l'ordre de  $10^{-9}$  m.

**XV-1.d Les trois échelles. Notion de quasi-particule.**

Soit un fluide contenu dans un récipient de taille macroscopique. On peut l'étudier à plusieurs échelles de taille.

- L'échelle macroscopique<sup>1</sup> : le système que l'on étudie est la totalité du fluide. Bien évidemment, cette approche gomme toutes les inhomogénéités du système et n'est donc pertinente que pour des systèmes homogènes, donc des systèmes à l'équilibre. On utilisera alors avec profit une approche thermodynamique.
- L'échelle microscopique<sup>2</sup> (ou atomique) : On étudie chaque molécule comme un système, c'est le domaine de la mécanique du point et de la physique des chocs. On peut penser que cette approche n'est possible que si le récipient ne contient qu'un faible nombre de molécules donc de façon extrêmement rare ; c'est naïf. Cette approche est en fait la seule approche possible lorsque le libre parcours moyen devient supérieur à la taille du récipient et que donc le choc le plus fréquent n'est plus le choc molécule-molécule mais le choc molécule-paroi. Pour un récipient de taille décimétrique à température ordinaire, ça devient vrai en dessous d'une pression de  $10^{-1}$  Pa ( $10^{-6}$  atm), c'est le domaine de l'*ultra-vide*.
- L'échelle mésoscopique<sup>3</sup> : Dans tous les autres cas, on découpe le système en *quasi-particules*, c'est à dire en petits sous-systèmes de taille appropriée ; cette taille doit vérifier trois critères :
  - être suffisamment petite pour que les paramètres physiques y soient à peu près uniformes, donc de taille petite devant l'échelle caractéristique des inhomogénéités, ce qui dépend du contexte du problème.
  - contenir suffisamment de molécules pour gommer par moyennage les fluctuations statistiques. Nous admettrons qu'en valeur relative ces

---

<sup>1</sup>  $\mu\alpha\kappa\rho\sigma$ =grand

<sup>2</sup>  $\mu\mu\kappa\rho\sigma$ =petit

<sup>3</sup>  $\mu\acute{\epsilon}\sigma\sigma$ =moyen

fluctuations varient comme l'inverse de la racine carrée du nombre de molécules et qu'elles deviennent donc négligeables dès que la quasi-particule contient un million de molécules ; pour cela, il suffit que la taille de la quasi-particule dépasse une centaine de distances interatomiques, soit 10 nm dans un liquide et 100 nm dans un gaz.

- être suffisamment grande pour que l'agitation thermique ne lui retire ou ne lui ajoute trop de molécules à cause des mouvements erratiques au voisinage de la surface ; nous devinons pour cela que la taille de la quasi-particule devra être grande devant le libre parcours moyen disons cent fois plus, soit 10 nm pour un liquide et  $10\mu\text{m}$  pour un gaz. En pratique on se place à la limite du troisième critère, le second se trouve vérifié automatiquement et le premier sauf cas tout à fait exceptionnel. A notre échelle, la quasi-particule est ressentie comme ponctuelle et le milieu comme un milieu continu. La vitesse de la quasi-particule est la moyenne de celle des molécules qui la composent et n'a donc plus rien à voir avec la vitesse d'agitation thermique qui disparaît du champ de notre étude au profit de la vitesse mésoscopique, qui, du reste, est la seule qui soit simple à mesurer.

## XV-2 Cinématique des fluides.

### XV-2.a Visualisation des écoulements. Mesure des vitesses.

Comment visualiser les vitesses dans un écoulement ? L'idée est d'y incorporer des particules solides réfléchissantes qui seront entraînées, d'éclairer le liquide et de le photographier avec un temps de pose approprié. L'interprétation de la photo est cependant moins évidente qu'il n'y paraît. Plusieurs situations se présentent :

- S'il y a beaucoup de particules partout dans le fluide et que le temps de pause est très court, on visualise les vitesses instantanées au même instant des particules partout dans le fluide. On mesure donc, à un instant donné, le champ des vitesses. Se dessinent à l'œil nu les lignes de champ du vecteur vitesse, appelées *lignes de courant*. On verra dans le paragraphe suivant qu'il s'agit d'un point de vue eulérien.
- s'il y a moins de particules et un temps de pause plus long, on visualise les trajectoires des particules. On peut, en modulant l'éclairage pour un effet stroboscopique, mesurer l'évolution dans le temps des vitesses d'une même particule. On verra dans le paragraphe suivant qu'il s'agit d'un point de vue lagrangien.
- Si l'on injecte dans le noir et à intervalle régulier des particules au même point et qu'on fait ensuite une photographie grâce à un bref éclair, on obtient encore autre chose : les positions à un instant donné des particules qui, à un moment ou un autre, sont passées par un point donné. On visualise ainsi des *lignes d'émission* ; nous ne développerons pas cette notion.

Insistons sur la distinction entre trajectoires et lignes de courant sur un exemple simpliste. Supposons que les quasi particules aient toutes un même mouvement circulaire (au centre près) et qu'elles aient donc toutes la même vitesse instantanée :  $V(\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y)$ . Il est aisé de se convaincre

que les trajectoires sont des cercles et que, puisqu'à un instant donné les vitesses sont toutes égales, les lignes de courant, toujours à un instant donné, sont des droites parallèles (dont la direction varie certes avec le temps).

Notons cependant qu'en régime permanent les deux notions coïncident.

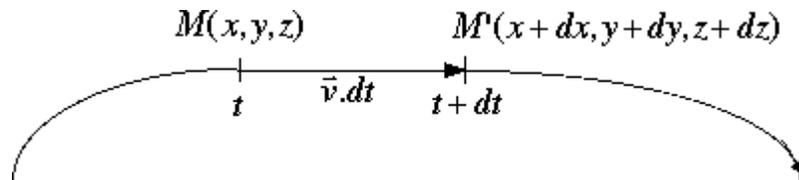
### XV-2.b Les deux points de vue.

Soit  $X$  un paramètre physique lié aux quasi-particules et dont on veuille étudier l'évolution avec le temps. On peut développer deux points de vue, chacun ayant un avantage certain et un inconvénient majeur par rapport à l'autre.

- Le point de vue lagrangien : On suit une particule  $\mathcal{P}$  dans son évolution et l'on étudie donc la fonction  $X_L(t) = X_L(\mathcal{P}, t)$  et dans la pratique on peut «mathématiser»  $\mathcal{P}$  en la remplaçant, par exemple, par ses coordonnées à l'instant initial.
    - avantage : La quasi-particule est un système fermé (ou peu s'en faut<sup>4</sup>) et les lois de la physique s'y appliquent.
    - inconvénient : Il est difficile de suivre le mouvement d'une goutte d'eau dans l'écoulement d'un torrent impétueux et il est donc difficile d'effectuer des mesures pour vérifier les prédictions théoriques.
  - Le point de vue eulérien : on considère  $X$  comme un champ.  $X_E(M, t)$  est la valeur de  $X$  de la particule qui se trouve au point  $M$  à l'instant  $t$ .
    - avantage : Les mesures sont aisées, il suffit de placer un capteur et un enregistreur au point  $M$
    - inconvénient : Au cours du temps, la particule qui est au point  $M$  n'est jamais la même<sup>5</sup> et les lois de la physique ne peuvent s'y appliquer.
- On remarquera que ce qui fait la force d'un point de vue fait la faiblesse de l'autre et vice-versa.

### XV-2.c Dérivée particulaire. Accélération particulaire.

Les théorèmes de la physique portent essentiellement sur la dérivée temporelle de grandeurs associée à un système fermé, donc la dérivée temporelle de la grandeur lagrangienne.



Soit donc une particule  $\mathcal{P}$  qui se trouve à l'instant  $t$  au point  $M(x, y, z)$  et à l'instant  $t + dt$  au point  $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ . Par définition :

$$\frac{dX_L(\mathcal{P}, t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{X_L(\mathcal{P}, t + dt) - X_L(\mathcal{P}, t)}{dt}$$

<sup>4</sup>l'échange de particules en surface sera géré par les lois sur la pression et sur la viscosité

<sup>5</sup>ni tout à fait la même, ni tout à fait une autre ?

Or par définition :

$$X_E(M, t) = X_L(\mathcal{P}, t)$$

$$X_E(M', t + dt) = X_L(\mathcal{P}, t + dt)$$

car  $\mathcal{P}$  se trouve en  $M$  à  $t$  et en  $M'$  en  $t + dt$  et donc :

$$\frac{dX_L(\mathcal{P}, t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{X_E(M', t + dt) - X_E(M, t)}{dt}$$

$$\frac{dX_L(\mathcal{P}, t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{X_E(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - X_E(x, y, z, t)}{dt}$$

Le numérateur équivaut, à l'ordre un, à la différentielle, ce qui conduit, pour la fonction de quatre variables, à :

$$\frac{dX_L(\mathcal{P}, t)}{dt} = \frac{\frac{\partial X_E}{\partial x} dx + \frac{\partial X_E}{\partial y} dy + \frac{\partial X_E}{\partial z} dz + \frac{\partial X_E}{\partial t} dt}{dt}$$

soit en introduisant les coordonnées de la vitesse :

$$\frac{dX_L(\mathcal{P}, t)}{dt} = \frac{\partial X_E}{\partial t} + v_x \frac{\partial X_E}{\partial x} + v_y \frac{\partial X_E}{\partial y} + v_z \frac{\partial X_E}{\partial z}$$

On peut condenser l'écriture ainsi :

$$\frac{dX_L(\mathcal{P}, t)}{dt} = \frac{\partial X_E}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) X_E$$

(On reverra si besoin l'opérateur  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$  dans le chapitre d'analyse vectorielle.)

On convient de l'écriture suivante : on n'écrit plus l'indice «E» car  $\vec{\nabla}$  s'applique à un champ donc sous-entend le point de vue eulérien et l'on n'écrit plus l'indice «L» en notant  $\frac{D}{Dt}$  la dérivée d'une fonction lagrangienne et on appellera *dérivée particulière* cette dérivée. On note donc :

$$\boxed{\frac{DX}{Dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) X}$$

### Accélération particulière.

Un cas particulier important est celui où  $X$  est la vitesse, sa dérivée particulière est dans ce cas l'accélération de la particule. Compte tenu de ce qui a été affirmé dans le chapitre d'analyse vectorielle sur  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ , l'accélération d'une particule peut s'écrire de plusieurs façons :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v}}$$

Ces trois formulations sont à connaître car c'est tantôt l'une, tantôt l'autre qui est la plus pertinente. Le terme  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  est parfois appelé *accélération convective*. On remarquera que cette accélération convective est un terme non linéaire et c'est lui qui fait toute la difficulté de la mécanique des fluides. Remarquons enfin que même en régime permanent, un fluide peut avoir un mouvement accéléré, toujours par cette accélération convective.

### XV-2.d Écoulements stationnaires.

Un écoulement est dit stationnaire si le champ des vitesses est indépendant du temps. Au delà de cette définition, que dire de plus ? Rappeler que l'accélération particulière n'est pas forcément nulle, car c'est  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  qui est nulle et non  $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ . Rappeler aussi qu'alors les notions de trajectoires et de lignes de courant se confondent.

### XV-2.e Écoulements incompressibles ou non.

Rappelons pour tout ce paragraphe la formulation locale de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

#### Fluide incompressible.

Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique  $\mu$  est constante ; en très bonne approximation un liquide est incompressible. La loi de conservation de la masse devient alors, puisque  $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$  et  $\mu = Cte$ ,  $\mu \text{div} \vec{v} = 0$  et donc  $\text{div} \vec{v} = 0$ . La vitesse est donc à flux conservatif, c'est-à-dire qu'il y a conservation du débit volumique en différentes sections d'un tube de courant. Résumons :

$$\boxed{\mu = Cte \Rightarrow \text{div} \vec{v} = 0}$$

#### Écoulement incompressible.

Un *écoulement* est dit incompressible si une quasi-particule conserve un volume constant, donc une masse volumique constante, au cours de son mouvement. La différence avec un fluide incompressible est qu'ici  $\mu$  est constante sur une trajectoire mais peut varier d'une trajectoire à l'autre. Par définition, on a donc  $\frac{D\mu}{Dt} = 0$ . Grâce à la formule établie plus haut, on en tire :

$$\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\nabla})\mu = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\mu = 0$$

Si, grâce aux formules d'analyse vectorielle, on développe ainsi la loi de conservation de la masse :

$$0 = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \text{div}(\vec{v}) + \overrightarrow{\text{grad}}\mu \cdot \vec{v}$$

et qu'on y reporte le résultat précédent, on en déduit  $\mu \operatorname{div} \vec{v} = 0$  et donc  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  et réciproquement. Résumons :

$$\boxed{\frac{D\mu}{Dt} = 0 \iff \operatorname{div} \vec{v} = 0}$$

La notion d'écoulement incompressible est intéressante car pour un gaz, *a priori* compressible, la plupart des écoulements sont incompressibles. Il suffit pour cela, et nous l'admettrons, que d'une part les dénivellées verticales des lignes de courants restent faibles (devant  $v^2/g$ , nous verrons pourquoi un peu plus loin), et d'autre part que les vitesses restent petites devant la vitesse du son. On se méfiera des écoulements canalisés de toute part par un tuyau convergent car alors la conservation du débit conduit à une accélération qui peut conduire à des vitesses supersoniques ; par contre, un écoulement canalisé d'un seul côté, comme le vent qui contourne un pavillon par dessus son toit, reste largement subsonique.

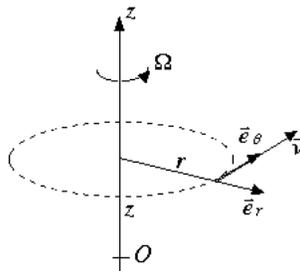
### Interprétation physique de la divergence.

Considérons un écoulement qui diverge à partir d'un point  $O$ , au premier sens du terme, c'est-à-dire tel que les particules aient un mouvement centrifuge, avec un champ de vitesse  $\vec{v}(M) = k \vec{OM}$  ( $k$  est une constante positive), soit  $\vec{v}(M) = kx \vec{e}_x + ky \vec{e}_y + kz \vec{e}_z$ . Sa divergence est alors égale à  $3k$  (calcul élémentaire) qui est positive. Un champ convergent vers  $O$  pourrait avoir la même allure avec  $k$  négatif et aurait une divergence négative. Du reste la terminologie «divergence» vient historiquement de la mécanique des fluides. Retenons de tout ceci que la divergence d'un champ de vecteurs permet de se rendre compte de la compression ou de la dilatation d'un fluide selon qu'elle est positive ou négative.

Attention toutefois au contre-exemple qui tue : un champ en  $\frac{1}{r^2} \vec{e}_r$  dont les lignes de courants divergent, au sens populaire, du point  $O$  a néanmoins une divergence nulle.

### XV-2.f Écoulements rotationnels ou non.

#### Définition et théorème de KELVIN.



Considérons un *solide* qui tourne autour d'un axe  $Oz$  avec une vitesse angulaire  $\Omega$  ; on a défini en mécanique du solide le vecteur rotation par  $\vec{\Omega} =$

$\Omega \vec{e}_z$ . Un point  $M$ , repéré dans la base locale des coordonnées cylindriques par  $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$  a pour vitesse  $\vec{v} = r \Omega \vec{e}_\theta$  soit encore, avec  $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = \vec{0}$ ,  $\vec{v} = \Omega \vec{e}_z \wedge (r \vec{e}_r + z \vec{e}_z) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$ . On en déduit en coordonnées cartésiennes  $\vec{v} = \Omega \vec{e}_z \wedge (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z)$  soit  $\vec{v} = -\Omega y \vec{e}_x + \Omega x \vec{e}_y$ . Calculons en le rotationnel ; un calcul simple aboutit à  $\text{rot } \vec{v} = 2 \Omega \vec{e}_z = 2 \vec{\Omega}$ .

Par analogie, pour un fluide, on peut considérer que son mouvement autour d'un point est une rotation en bloc de vecteur rotation  $(1/2) \text{rot } \vec{v}$  (dans la littérature, on trouve le nom de *vecteur tourbillon*) associée de déformations (dont une éventuelle compression ou dilatation gérée par  $\text{div } \vec{v}$ ). Signalons la différence essentielle entre solide et fluide : pour un solide le vecteur rotation est un vecteur indépendant du point où l'on est, car la rigidité du solide corrèle les vitesses des différents points du solide ; mais pour un fluide, le vecteur tourbillon est un champ car les déformations possibles suppriment cette corrélation.

On appellera écoulement *irrotationnel* (ou *non tourbillonnaire*, terminologie plus piégeante, cf *infra*) un écoulement pour lequel le rotationnel de la vitesse est nul ; sinon l'écoulement sera qualifié de *rotationnel* (ou *tourbillonnaire*).

Cette distinction est loin d'être artificielle ; en effet, pour un écoulement où la compressibilité et la viscosité sont négligeables, ce qui est fréquemment le cas, on peut montrer que la circulation de la vitesse sur une courbe fermée (liée au rotationnel par le théorème de STOKES) se conserve lorsqu'on suit cette courbe considérée comme entraînée par le mouvement du fluide (il s'agit du théorème de KELVIN, hors programme, il n'est cité que pour éclairer le cours) ; en particulier, on en déduit, dans ces conditions, que si le rotationnel de la vitesse est nulle en un point, il le reste le long de la trajectoire du point en question, par exemple si loin d'un obstacle, le vent est uniforme, on pourra utilement utiliser cette remarque. Du reste, on peut établir, pour un fluide visqueux, une loi d'évolution dans le temps du rotationnel de la vitesse, c'est bien au-delà de nos ambitions, mais c'est très utile aux météologues (ou haruspices ?) pour prédire l'évolution des dépressions atmosphériques.

### Exemple d'écoulements rotationnels ou non.

En général, un mouvement rotationnel se caractérise par des tourbillons. Certes, mais il faut rester prudent car il existe des écoulements avec tourbillon et de rotationnel nul et des écoulements sans tourbillon avec rotationnel non nul. Voici donc deux exemple pour nous inciter à la prudence.

1. Considérons un vent violent sur la plaine du Far West. Au contact du sol, le vent est freiné et sur les basses couches de l'atmosphère, le champ de vitesses est de la forme  $\vec{v}(M) = f(z) \vec{e}_x$  avec  $f$  fonction croissante. Un simple calcul conduit alors à  $\text{rot } \vec{v} = f'(z) \vec{e}_y$ , donc, bien que l'écoulement soit rectiligne, le rotationnel est non nul.

Ajoutons qu'une perturbation (obstacle, ascendance d'air chaud) peut déstabiliser le phénomène et donner au rotationnel une composante verticale qui sera l'amorce d'une tornade<sup>6</sup> où le tourbillon deviendra enfin

<sup>6</sup>Relire le Magicien d'Oz

visible.

2. Considérons un mouvement de rotation de fluide autour d'un axe  $Oz$  avec une vitesse en  $1/r$ , soit :  $\vec{v} = (Cte/r) \vec{e}_\theta = (Cte/r^2)r \vec{e}_\theta$  soit encore, comme pour un solide (cf supra)

$$\vec{v} = (Cte/r^2) \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OM} = -Cte \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{e}_x + Cte \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{e}_y$$

Le calcul du rotationnel, fastidieux en coordonnées cartésiennes, très simple en utilisant le formulaire du chapitre sur l'analyse vectorielle, donne ici un rotationnel nul.

Retenons néanmoins que, comme pour la divergence, c'est la mécanique des fluides qui a donné son nom au rotationnel.

### Potentiel des vitesses. Écoulement incompressible et irrotationnel.

Soit un écoulement irrotationnel. Puisque son rotationnel est nul, on sait que le champ de vitesses dérive d'un potentiel appelé, ça coule de source, *potentiel des vitesses*. On note habituellement  $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi$  (on trouve parfois un signe moins). Pour cette raison un écoulement irrotationnel est parfois qualifié de *potentiel*.

Si de plus l'écoulement est incompressible et donc que  $\text{div} \vec{v} = 0$ , alors  $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\Phi) = 0$  soit  $\Delta\Phi = 0$ . Il se trouve que cette équation est vérifiée par le potentiel électrostatique dans les régions de l'espace non chargées (hors programme mais simple à démontrer à partir de  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$  et  $\text{div} \vec{E} = 0$ ) : on peut raisonner par analogie ; on peut aussi simuler un écoulement par un courant électrique dans une cuve d'électrolyte. En exercice, on étudiera quelques écoulements irrotationnels et incompressibles.

### XV-2.g Conditions aux limites.

Que peut-on dire du champ des vitesses d'un fluide autour d'un obstacle solide ? Dans la mesure où le fluide ne peut ni pénétrer dans le solide, ni en décoller, ce qui générerait une poche de vide instable, on peut affirmer que la composante normale de la vitesse est nulle ou, ce qui revient au même, que la vitesse est tangente à la paroi.

Peut-on aller plus loin ? Oui, mais avec subtilité, on verra plus loin que les forces de viscosité s'opposent à une discontinuité de vitesse qui générerait une force infinie ; donc au contact d'une paroi, la vitesse est nulle (ou plutôt la vitesse relative pour le cas où la paroi est animée d'une vitesse), ceci quand on ne peut pas négliger la viscosité.

La notion de *couche limite* étudiée plus loin permettra de préciser quand on peut dire, qu'au contact d'une paroi, la vitesse est nulle et quand elle est tangentielle.

### XV-3 Dynamique des fluides.

#### XV-3.a Forces volumiques.

Maintenant que nous nous sommes dotés d'outils pour l'étude des vitesses et des accélérations, il est temps de nous intéresser aux forces qui s'exercent sur les molécules d'une quasi-particule. Le premier type de force regroupe celles qui ont un long rayon d'action et s'exercent donc sur toutes les molécules. Il s'agit d'une part des forces de pesanteur ; si  $\mu$  est la masse volumique et  $dV$  le volume de la particule, la force de pesanteur est  $d\vec{F}_p = \mu \vec{g} dV$ . Pour des mouvements à l'échelle de la planète (courants marins et atmosphériques), il faudra y ajouter la force de CORIOLIS  $d\vec{F}_c = 2\mu \vec{\Omega}_T \wedge \vec{v} dV$  où  $\vec{\Omega}_T$  est le vecteur rotation de la Terre par rapport au repère de FOUCAULT <sup>7</sup>.

D'autre part, si le fluide est conducteur, il faudra y ajouter la force de LAPLACE. On verra (cf cours sur l'électromagnétisme) qu'avec un milieu électriquement neutre (c'est pratiquement toujours le cas) parcouru par un courant, cette force est  $d\vec{F}_m = \vec{j} \wedge \vec{B} dV$ .

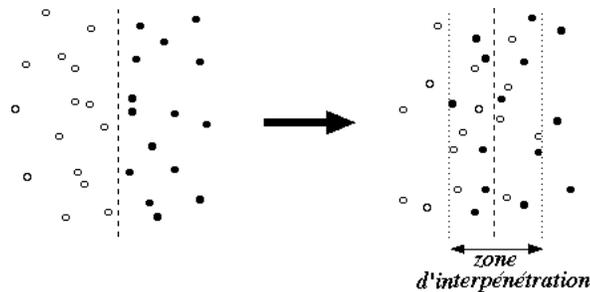
#### XV-3.b Forces surfaciques.

##### Forces de pression. Équivalent volumique.

Un second type de force regroupe celles qui ont un court rayon d'action et ne concernent donc que les molécules proches de la surface de la quasi-particule et qu'on modélise donc par des forces de surface.

Parmi elles figurent les forces de VAN DER WAALS, légèrement attractives.

Figurent aussi des forces fictives de la même nature que la poussée d'un turbo-réacteur et dues aux phénomènes diffusifs. En effet, par suite du mouvement erratique d'agitation thermique, des molécules initialement dans le volume de contrôle en sortent et que d'autres initialement à l'extérieur y entrent ; il se forme ainsi une couche où se mélangent intimement des molécules initialement dehors et dedans. Le cours sur les phénomènes diffusifs justifiera que l'épaisseur de cette couche varie comme la racine carrée du temps écoulé.



Il est dès lors plus simple de définir la quasi particule comme un système

<sup>7</sup>Attention dans ce contexte à ne pas confondre  $\vec{\Omega}_T$ , vecteur rotation de la Terre avec le vecteur tourbillon  $\vec{\Omega} = (1/2) \text{rot } \vec{v}$

ouvert pour lequel (cf chapitre précédent) :

$$d\vec{p} = \vec{F} dt + \delta\vec{p}_e - \delta\vec{p}_s$$

Comme par nature  $\vec{p}_e$  est dirigé vers l'intérieur et  $\vec{p}_s$  vers l'extérieur, donc  $-\vec{p}_s$  vers l'intérieur, le bilan est une force fictive dirigée vers l'intérieur ; sauf cas tout à fait exceptionnel (qui conduit alors à des pressions négatives) elle l'emporte sur la force de VAN DER WAALS. En l'absence d'inhomogénéités de vitesse ou de viscosité, on peut montrer, par des considérations élémentaires de symétrie, que la force élémentaire qui s'exerce sur un élément de surface de la quasi-particule est la force de pression  $-p \vec{d}S$ .

Découpons le volume  $dV$  de la quasi-particule en volumes élémentaires  $\delta V$ , le bilan des forces de pression peut s'écrire :

$$\oint_{\Sigma} -p dS = - \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} p \delta V$$

or, en pratique la quasi-particule est suffisamment petite pour que le gradient de pression y soit uniforme, d'où :

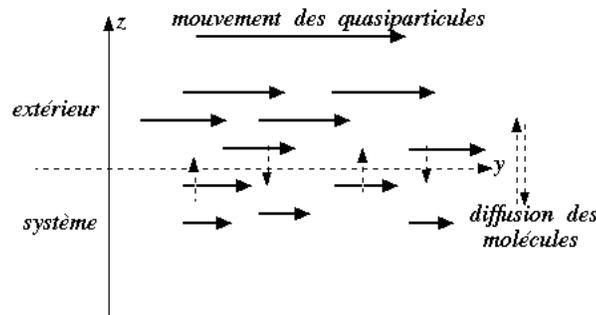
$$\oint_{\Sigma} -p dS = -\overrightarrow{\text{grad}} p \iiint_{\Omega} \delta V = -\overrightarrow{\text{grad}} p dV$$

Retenons donc :

le bilan des forces de pression sur une quasi-particule équivaut à une force  $-\overrightarrow{\text{grad}} p dV$

### Fluides newtoniens. Forces de Viscosité. Équivalent volumique.

Considérons maintenant ce qui se passe si le champ de vitesses est inhomogène. Le programme nous restreint à une approche modeste dans le seul cas simple où  $\vec{v}(M, t) = v(z) \vec{e}_y$ . Considérons une quasi-particule cubique (parallèlement aux axes de  $Oxyz$ ) et sa face supérieure d'aire  $dS$ .



Comme précédemment, il faut rajouter une force fictive  $\delta\vec{p}_e - \delta\vec{p}_s = \delta m_e \vec{v}_e - \delta m_s \vec{v}_s$ . En pratique, les débits massiques entrant et sortant sont égaux (la masse de la quasi-particule reste fixe), on a donc en projection sur  $Oy$

une force fictive  $dF_y = \delta m_e (v_{ey} - v_{sy})$  où comme  $v_{sy}$  concerne des molécules sous la surface et  $v_{ey}$  au dessus, ces deux quantités diffèrent et il y a apparition d'une force tangentielle à la surface, qui s'ajoute à la force de pression qui, elle, est normale.

Un fluide est dit *newtonien* si cette force est proportionnelle au gradient de la vitesse (et à la surface) soit :

$$\text{Si } \vec{v}(M, t) = v(z) \vec{e}_y \text{ et si } d\vec{S} = dS \vec{e}_z \text{ alors } d\vec{F} = \eta \frac{\partial v}{\partial z} dS \vec{e}_y$$

$\eta$  s'appelle viscosité dynamique du fluide ; elle s'exprime en Poiseuille (Pl) (ou en Pascal.seconde) ; on introduit aussi la viscosité cinématique rapport de la viscosité dynamique sur la masse volumique (soit  $\nu = \eta/\mu$ ) mesurée en mètre carré par seconde.

Pour les autres faces du cube, dans notre contexte, les faces latérales ne sont soumises à aucune force, car la vitesse de part et d'autre est la même et la face inférieure soumise à une force de viscosité donnée par la même formule mais avec un signe négatif.

Quelques ordres de grandeur s'imposent :

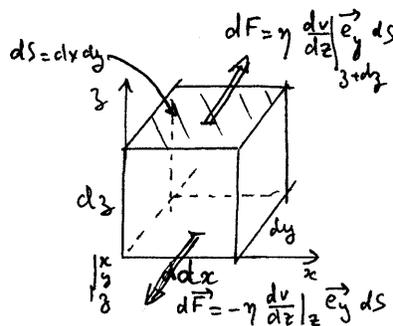
pour l'air à 20° C et sous 1 bar  $\eta = 1,8.10^{-5}$  Pl,  $\mu = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\nu = 1,5.10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

pour l'eau à 20° C  $\eta = 1,0.10^{-3}$  Pl,  $\mu = 1,0.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\nu = 1,0.10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

et pour citer un corps très visqueux pour la glycérine  $\eta = 2,3$  Pl,  $\mu = 1,3.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\nu = 1,8.10^{-3} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

Revenons à notre quasi-particule cubique (ou parallélépipédique) de côtés de longueurs  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  et un coin au point  $M(x, y, z)$  ; les forces de viscosité sont  $\eta \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z+dz} dx dy \vec{e}_y$  sur la face supérieure,  $-\eta \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_z dx dy \vec{e}_y$  sur la face inférieure et rien sur les autres. Le bilan est donc :

$$dF = \eta \left( \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z+dz} - \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_z \right) dx dy \vec{e}_y$$



Un développement de TAYLOR conduit, en reconnaissant  $dV=dx.dy.dz$ , à :

$$dF = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dV \vec{e}_y$$

où l'on reconnaît, dans notre modèle :

$$dF = \eta \Delta \vec{v} dV$$

On admettra que ce résultat se généralise. Retenons donc :

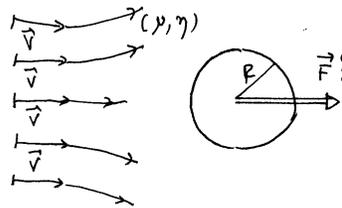
le bilan des forces de viscosité sur une quasi-particule équivaut à une force  $\eta \Delta \vec{v} dV$

Terminons en rappelant que ceci n'est vrai que pour le modèle du fluide newtonien. Il existe toutes sortes de comportements qui s'écartent de ce modèle, mais nous ne les évoquerons pas ici. Heureusement, les deux fluides les plus courants, l'eau et l'air sont newtoniens.

## XV-4 Étude phénoménologique.

Nous avons désormais tous les outils pour une étude théorique, mais il est important en mécanique des fluides de s'être confronté à l'expérience avant de mettre en équation les phénomènes, afin d'éviter les raisonnements trop simplistes.

### XV-4.a Traînée d'une sphère dans un écoulement. Nombre de REYNOLDS.



Considérons un solide se déplaçant à vitesse constante dans un fluide qui est au repos loin de lui (ou ce qui revient au même à un changement de référentiel près, immobile dans un fluide qui, loin de lui, a une vitesse uniforme). Quelle force (appelée force de *traînée* ou traînée tout court) s'exerce sur le solide? Cherchons à deviner les facteurs pertinents :

- la vitesse relative  $V$ , bien sûr,
- la forme et la taille du solide, mais pas du tout son intérieur car le fluide ne peut interagir que par des forces surfaciques; limitons nous à une forme sphérique, la taille sera donnée par le rayon  $R$ ,
- la nature du fluide, mais là on hésite entre deux idées :
  - comme le solide doit repousser le fluide et donc le mettre en mouvement, c'est la masse volumique  $\mu$  du fluide qui importe,
  - comme la viscosité gère les inhomogénéités de vitesses et qu'il y a vitesse relative, c'est la viscosité  $\eta$  qui importe.

On hésitera donc entre deux formules donnant la force  $F$  en fonction soit de  $R, V$  et  $\mu$ , soit de  $R, V$  et  $\eta$ . Tentons donc de trouver une loi *monôme*  $F = R^\alpha \cdot V^\beta \cdot \mu^\gamma$  ou  $F = R^\alpha \cdot V^\beta \cdot \eta^\gamma$  à une constante multiplicative non dimensionnée près et raisonnons par analyse dimensionnelle, on a :

- $[F] = M.L.T^{-2}$
- $[R] = L$
- $[V] = L.T^{-1}$
- $[\mu] = M.L^{-3}$
- pour  $\eta$ , c'est moins immédiat ; on part de  $F = \eta \frac{\partial v}{\partial z} dS$  d'où  $M.L.T^{-2} = [\eta] \cdot \frac{L.T^{-1}}{L} \cdot L^2$  d'où  $[\eta] = M.L^{-1}.T^{-1}$

La première hypothèse donne  $M.L.T^{-2} = L^\alpha \cdot (L.T^{-1})^\beta \cdot (M.L^{-3})^\gamma$  d'où, en identifiant les exposants,  $1 = \gamma$ ,  $1 = \alpha + \beta - 3\gamma$  et  $-2 = -\beta$  d'où  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$  et  $\gamma = 1$  et une loi en  $\mu.R^2.V^2$ .

La seconde hypothèse donne  $M.L.T^{-2} = L^\alpha \cdot (L.T^{-1})^\beta \cdot (M.L^{-1}.T^{-1})^\gamma$  d'où, en identifiant les exposants,  $1 = \gamma$ ,  $1 = \alpha + \beta - \gamma$  et  $-2 = -\beta - \gamma$  d'où  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  et  $\gamma = 1$  et une loi en  $\eta.R.V$ .

Laquelle est valable ? Le suspense est insoutenable ! Il y a en fait bien longtemps que les expériences ont été menées en soufflerie. Au très faibles vitesses, c'est la loi en  $\eta.R.V$  qui se vérifie ; une étude théorique a été possible, a permis de calculer la constante dont la valeur a été validée par l'expérience ; on a  $F = 6 \pi \eta.R.V$ , formule connue sous le nom de loi de STOKES.

Par contre, aux grandes vitesses, c'est la loi en  $\mu.R^2.V^2$  qui se confirme ; ici, la constante n'a pu être déterminée qu'expérimentalement. L'usage est de noter  $F = C_x \mu S v^2 / 2$  où  $S = \pi R^2$  est la surface de la sphère projetée sur un plan (orthogonal à la vitesse si l'on veut étendre la notation à autre chose qu'une sphère) ; le résultat expérimental est  $C_x = 0,44$ . On note parfois aussi  $F = C \mu R^2 v^2$  où  $C = \pi C_x / 2 = 0,69$ .

Et aux vitesses moyennes, ni l'une ni l'autre des formules ne convient.

Reste un épineux problème : trouver le domaine de validité des deux formules. REYNOLDS a eu l'idée de faire apparaître les résultats expérimentaux sous forme de relation entre deux nombres sans dimensions :

- en abscisse le rapport des deux lois de force, sans les constantes soit :

$$\mathcal{R} = \frac{\mu R^2 V^2}{\eta R V} = \frac{\mu R V}{\eta} = \frac{R V}{\nu}$$

appelé depuis nombre de REYNOLDS

- en ordonnée la force divisée par la loi aux grandes vitesses sans constante soit

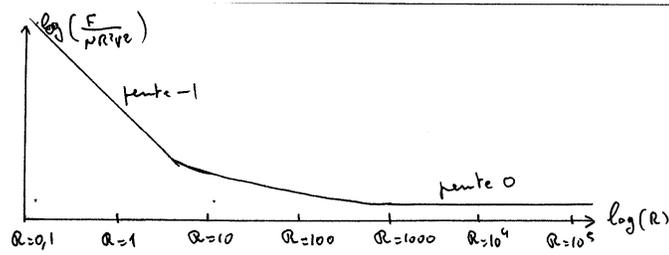
$$\frac{F}{\mu R^2 V^2}$$

Toutes les expériences avec toutes sortes de fluides, de rayons et de vitesses confirment alors une courbe unique tracée en échelle logarithmique :

- pour  $\mathcal{R}$  inférieur à 10, la pente -1 confirme la loi de STOKES,
- pour  $\mathcal{R}$  compris entre 10 et 1000, on observe une zone de raccordement,
- pour  $\mathcal{R}$  supérieur à 1000, la pente nulle confirme la seconde formule.

Donnons pour finir quelques ordres de grandeur :

- pour une voiture ( $R \sim 1\text{m}$ ) en ville ( $V \sim 15\text{m.s}^{-1}$ ), dans l'air, bien sûr



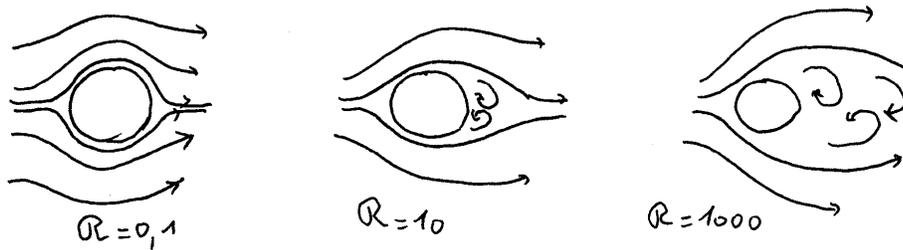
( $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ), on a  $\mathcal{R} \sim 10^6$ , on est largement dans le cadre d'une loi en  $\mu R^2 V^2$ .

- pour un nageur ( $R \sim 0,25\text{m}$ ) champion olympique ( $V \sim 1,5\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ), dans l'eau, bien sûr ( $\nu = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ), on a  $\mathcal{R} \sim 3 \cdot 10^5$ , on est largement dans le cadre d'une loi en  $\mu R^2 V^2$ .
- pour un microbe ( $R \sim 1\mu\text{m}$ ) au galop ( $V \sim 1\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) dans un milieu aqueux ( $\nu = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ), on a  $\mathcal{R} \sim 10^{-6}$ .

Il est bon de retenir que les objets de notre taille, même à très faible vitesse ont des nombres de REYNOLDS élevés.

#### XV-4.b Écoulements laminaires et turbulents.

Observons les schémas des trajectoires du fluide pour différents valeurs du nombre de REYNOLDS.



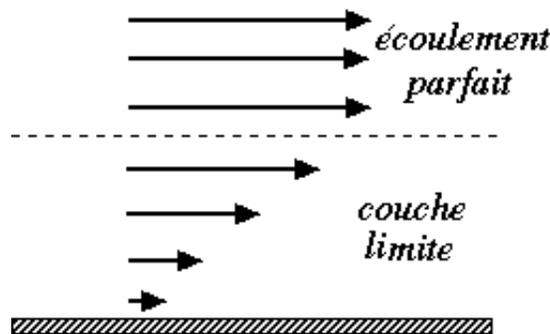
Aux faibles valeurs de  $\mathcal{R}$ , les trajectoires sont localement parallèles et collent à la surface de la sphère et le régime est partout stationnaire. On dit avoir affaire à un régime *laminaire*.

Quand  $\mathcal{R}$  augmente les trajectoires décollent de la surface et délimitent derrière la sphère une zone où apparaissent des tourbillons où les échanges de quantité de mouvement se font par brassage (on parle de *convection*). On dit avoir affaire à un régime *turbulent*.

Plus  $\mathcal{R}$  augmente, plus les trajectoires décollent tôt et plus la zone de tourbillons est importante et arrive un moment où les tourbillons se détachent de la sphère et partent vers l'arrière, pendant que naissent d'autres tourbillons derrière la sphère, le régime devient nettement non permanent.

### XV-4.c Couche limite. Écoulement parfait. Retour sur les conditions au limites.

L'expérience prouve qu'il existe au voisinage de la surface du solide une mince couche où le module de la vitesse varie énormément de zéro au contact de celle-ci jusqu'à une valeur du même ordre que la vitesse loin du solide. On appelle cette couche la *couche limite*; le gradient de vitesse  $y$  est énorme et les forces de viscosité  $y$  sont prépondérantes.



Au delà de cette couche les gradients sont faibles et les forces de viscosité sont négligeables (ainsi du reste que tous les autres phénomènes diffusifs, comme la conduction thermique, l'écoulement est donc aussi adiabatique et même réversible puisque les gradients sont négligeables); on peut donc  $y$  modéliser le fluide par un fluide non visqueux et l'on dit alors qu'on a affaire à un *écoulement parfait* et en pratique cet écoulement est irrotationnel (cf les conséquences du théorème de KELVIN). Notons que c'est la couche limite qui décolle de la sphère et donne naissance à la zone tourbillonnaire.

Pour un solide de forme compacte comme une sphère, l'épaisseur de la couche limite est faible devant le rayon et on peut l'ignorer, en contrepartie, il faudra accepter l'idée d'une vitesse de fluide non nulle (mais tangentielle) au contact du solide.

Notons que l'épaisseur de la couche limite, comme tout phénomène diffusif croît comme la racine carrée du temps que met le fluide à aller du point où il entre en contact avec le solide et celui où il atteint le point considéré. Pour une sphère, ce temps est trop court pour obtenir une épaisseur appréciable par comparaison avec le rayon; par contre, pour un tuyau très long et de faible rayon, la couche limite finit par envahir tout le tube (sauf près de sa section d'entrée) et la viscosité ne sera nulle part négligeable.

Notons enfin que pour les très grandes valeurs du nombre de REYNOLDS (au delà de  $10^5$ ), la couche limite devient elle-même turbulente; ce qui a pour conséquence de retarder le décollement des lignes de courant, de diminuer la zone tourbillonnaire et donc de diminuer la traînée. On peut favoriser ce phénomène en rendant la surface moins lisse (cf la balle de golf).

## XV-5 Écoulements parfaits.

### XV-5.a Équation d'EULER.

Soit une quasi-particule de masse  $dm$ , occupant le volume  $dV$ , soumise à la force de pesanteur  $dm \vec{g}$  et aux forces de pression dont le bilan volumique est  $-\overrightarrow{\text{grad}} p dV$ . Il n'y a pas de forces de viscosité puisque l'écoulement est parfait. Le principe fondamental de la dynamique relie ces forces à l'accélération particulière  $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$  :

$$dm \vec{a} = dm \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p dV$$

En divisant par  $dm$ , en introduisant la masse volumique  $\mu = dm/dV$  et en rappelant les différentes expressions de l'accélération particulière on obtient la fondamentale équation d'EULER :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} p$$

On ajoutera éventuellement la force de CORIOLIS pour les phénomènes à l'échelle terrestre et les forces magnétiques, le cas échéant, en reprenant le raisonnement au début.

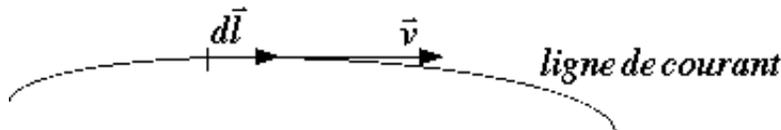
### XV-5.b Théorèmes de BERNOULLI.

Il existe plusieurs variantes de ce théorème, selon les hypothèses de travail. Deux d'entre elles sont au programme :

#### Première variante.

Considérons un écoulement parfait, stationnaire et incompressible. L'équation d'EULER est valable puisque l'écoulement est parfait. La dérivée temporelle de la vitesse est nulle puisque l'écoulement est stationnaire. Le champ de pesanteur uniforme dérive du potentiel  $gz$ . Donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz) - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} p$$



Multiplions scalairement par un segment élémentaire  $d\vec{l}$  d'une ligne de courant, donc parallèle à la vitesse ; le produit mixte qui apparaît est donc nul

et grâce à la formule (cf analyse vectorielle)  $\overrightarrow{\text{grad}}X \cdot \overrightarrow{dl} = dX$ , on tire, puisque  $\mu$  est constant sur la trajectoire (écoulement incompressible) :

$$d\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + gz + \frac{p}{\mu}\right) = 0$$

soit :

$$\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + gz + \frac{p}{\mu} = Cte \text{ sur une même ligne de courant}$$

Attention à bien comprendre que chaque trajectoire ou ligne de courant a une constante différente. Retenons donc :

Pour un écoulement parfait, stationnaire et incompressible,

$$\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + gz + \frac{p}{\mu} = Cte \text{ sur une même ligne de courant}$$

### Deuxième variante

Considérons un écoulement parfait, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible. Ici, par rapport à la situation précédente  $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{v}$  est nul et  $\mu$  est constante; l'équation d'EULER devient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + gz + \frac{p}{\mu}\right) = \overrightarrow{0}$$

La quantité entre parenthèses ne dépend donc ni de  $x$ , ni de  $y$ , ni de  $z$  et, puisqu'on est en régime stationnaire, ni de  $t$ . Elle est donc constante, mais cette fois dans tout l'écoulement. Retenons donc :

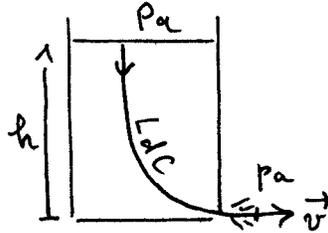
Pour un écoulement parfait, irrotationnel et stationnaire de fluide incompressible,

$$\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + gz + \frac{p}{\mu} = Cte \text{ dans tout l'écoulement}$$

En comparant ce résultat avec le bilan énergétique dans un écoulement permanent établi dans le chapitre précédent, on peut démontrer que la puissance des forces intérieures pour un fluide incompressible et non visqueux est nulle (mais ce n'est pas un objectif du programme). Fondamentalement, les formules de BERNOULLI traduisent la conservation de l'énergie.

### Quelques conséquences et applications

1. Pour un fluide incompressible au repos (donc irrotationnel) on retrouve la loi de l'hydrostatique :  $p(z) = p(0) - \mu g z$
2. Considérons un récipient qui se vide de son liquide par le bas grâce à un orifice de surface petite devant la surface libre du récipient.



Considérons une ligne de courant partant de la surface où règne la pression atmosphérique  $p_a$ , où la vitesse est négligeable, car la surface grande et notons  $h$  l'altitude par rapport au trou et arrivant dans le jet où la pression est aussi  $p_a$ , la vitesse  $v$  et l'altitude nulle. Le régime est quasi-permanent si le trou est petit. Le théorème de BERNOULLI donne :

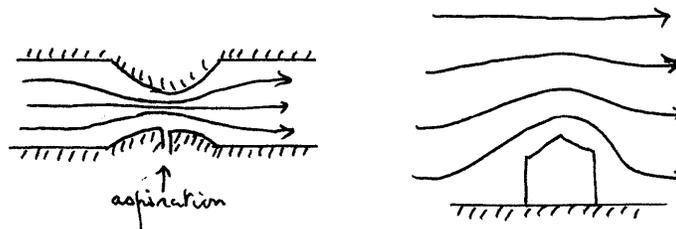
$$\frac{0^2}{2} + g h + \frac{p_a}{\mu} = \frac{v^2}{2} + g \cdot 0 = \frac{p_a}{\mu}$$

soit

$$v = \sqrt{2gh}$$

appelée formule de TORRICELLI; on retrouve la loi relative à la chute libre.

3. Plus important : considérons un écoulement horizontal qui présente localement un étranglement forcé soit par une canalisation, soit par un obstacle. Au niveau de l'étranglement la section du tube de courant diminue, donc la vitesse augmente pour assurer la conservation du débit et donc, puisque  $\vec{v}^2/2 + p/\mu = Cte$ , la pression *diminue* : il s'agit de l'effet VENTURI. Cet effet explique : l'arrachement des toits par fort coup de vent, le gonflement de la capote d'un 2 CV Citroën, l'aspiration d'un liquide (ou d'un gaz) au niveau de l'étranglement et son entraînement sous forme de goutelettes par le fluide (vaporisateur à parfum, carburateur, trompe à vide).



**XV-5.c Au delà des théorèmes de BERNOULLI.**

Pour des écoulements non stationnaires ou compressibles ou les deux, on pourra s'inspirer de la démonstration des théorèmes de BERNOULLI pour en construire des variantes adéquates. Nous en verrons quelques exemples en exercice.

**XV-6 Écoulements de fluides visqueux.**

**XV-6.a Équation de NAVIER-STOKES.**

Pour étudier le mouvement d'une quasi-particule de fluide visqueux, il suffit d'ajouter l'équivalent volumique des forces de viscosité, d'où :

$$dm \vec{a} = dm \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p dV + \eta \Delta \vec{v} dV$$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} v \wedge \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} p + \frac{\eta}{\mu} \Delta \vec{v}$$

où l'on peut, bien sûr, introduire la viscosité cinématique  $\nu = \eta/\mu$ .

Cette équation porte les noms de NAVIER-STOKES ; officiellement, elle n'a pas à être mémorisée.

**XV-6.b Relecture du nombre de REYNOLDS**

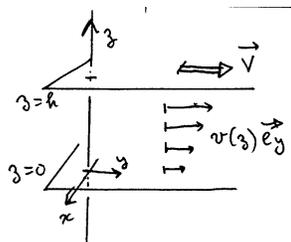
Lorsque la viscosité prédomine on a  $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\eta}{\mu} \Delta \vec{v}$ . En ordre de grandeur et en introduisant une longueur caractéristique  $R$  et un temps caractéristique de diffusion  $T_d$ , on tire :  $v/T_d = (\eta/\mu)(v/R^2)$  soit  $T_d = \mu R^2/\eta$ .

Par contre pour un phénomène convectif, c'est à dire de transport par le fluide, la distance caractéristique est le produit de la vitesse par le temps caractéristique de convection  $T_c$ , soit  $R = v T_c$  et  $T_c = R/v$ .

Formons le rapport  $T_d/T_c$ , on trouve :

$$\frac{T_d}{T_c} = \frac{\mu R v}{\eta} = \mathcal{R}$$

**XV-6.c Un exemple : écoulement de COUETTE simplifié.**



Considérons deux plans horizontaux de cotes  $z = 0$  et  $z = h$ , celui du bas immobile et celui du haut en translation uniforme de vitesse  $V \vec{e}_y$ , séparés par un fluide visqueux. On cherche comme mouvement du fluide une solution laminaire stationnaire de sorte que  $\vec{v}(M, t) = v(z) \vec{e}_y$ . On se convaincra aisément que les lignes de champ, donc les trajectoires sont parallèles à  $Oy$  donc qu'une particule a un mouvement rectiligne uniforme car  $z = Cte$  sur la trajectoire ; l'accélération particulaire est donc nulle. Projetons l'équation de NAVIER-STOKES sur  $Oy$  :

$$0 = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dy} + \frac{\eta}{\mu} \Delta v(z)$$

L'invariance par translation du problème garantit que la pression ne dépend pas de  $y$  et le laplacien se simplifie ici, d'où :

$$\frac{d^2v}{dz^2} = 0$$

Les conditions aux limites (vitesses relatives nulles sur les parois) sont  $v(0) = 0$  et  $v(h) = V$  d'où :

$$v(z) = V \frac{z}{h}$$

La force qu'exerce à l'altitude  $z$  le fluide sur une surface de vecteur  $dS \vec{e}_z$  et en particulier sur le plan inférieur à l'altitude  $z = 0$  est :

$$d\vec{F} = \eta \frac{dv}{dz} dS \vec{e}_y$$

soit une force surfacique selon  $Oy$  de valeur

$$\frac{dF}{dS} = \frac{\eta V}{h}$$

En fait, dans l'expérience de COUETTE, le fluide est entre deux cylindres coaxiaux avec un faible interstice entre eux et l'on mesure alors le moment de la force par rapport à l'axe ; ce dispositif a été à l'origine des premières mesures de viscosité.